Stammfunktion und unbestimmtes Integral

(Die Beispiele weichen von den Zahlenbeispielen im Video ab!)

GRUNDGEDANKEN DER INTEGRALRECHNUNG

Bisher: Differentialrechnung

Größe f

↓ Ableitung

Momentane Änderungsrate f'

Neu: Integralrechnung

Gesamtänderung der Größe

↑ Integral

Momentane Änderungsrate f'

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, bend right, "\text{ableiten / differenzieren}"'] & f \arrow[l, bend right, "\text{aufleiten / integrieren}"'] \end{tikzcd}$$

→ F(x) ist die Stammfunktion von f.

Merke:

Gegeben sei eine auf dem Intervall I definierte Funktion f.
Eine Funktion F heißt Stammfunktion von f auf dem Intervall I, wenn für alle $x \in I$ gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

BEISPIEL

$f(x) = x^3$

$F(x) = \frac{1}{4}x^4$ ist eine Stammfunktion von f.

denn: $F_1(x) = \frac{1}{4}x^4$ $\quad F_2(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3$ $\quad F_3(x) = \frac{1}{4}x^4 - 7{,}5$

→ $F_1'(x) = f(x) = x^3$ $\quad F_2'(x) = f(x) = x^3$ $\quad F_3'(x) = f(x) = x^3$

Es gibt unendlich viele Stammfunktionen von f:

$$F(x) = \frac{1}{4}x + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

→ Menge aller Stammfunktionen von f.

Merke:

Die Menge aller Stammfunktionen von f(x) nennt man das unbestimmte Integral von f(x).

Es gilt:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

BEISPIELE

- $\int \frac{1}{5}x^2 dx = \frac{1}{15}x^3 + c \qquad c \in \mathbb{R}$
- $\int x \cdot z dz = \frac{x}{2} z^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{4}{7}x^3 dx = \frac{4}{28}x^4 + c \qquad c \in \mathbb{R}$
- $\int x^{27} dx = \frac{1}{28}x^{28} + c \qquad c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{2}x^4 dx = \frac{1}{10}x^5 + c \qquad c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{7}{10}x^9 dx = \frac{7}{100}x^{10} + c \qquad c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{5}{8}x^5 dx = \frac{5}{48}x^6 + c \qquad c \in \mathbb{R}$
- $\int e^x dx = e^x + c \qquad c \in \mathbb{R}$
- $\int cos(x) dx = \sin(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$
- $\int sin(x) dx = -\cos(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$