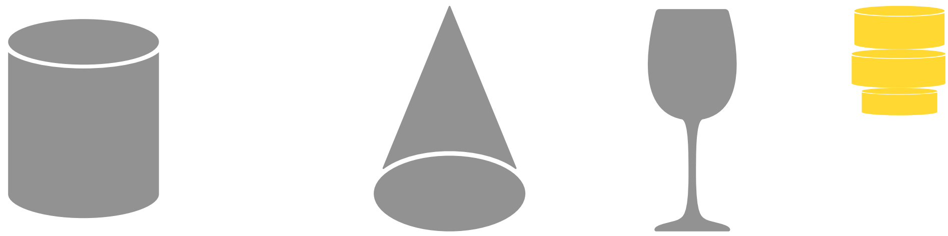
5.6. Rotationskörper und ihre Volumina

(Die Beispiele weichen von den Zahlenbeispielen im Video ab!)

VOLUMENFORMELN
(Notieren Sie unter den Körpern die dazugehörige Volumenformel!)

$V = a^3$ $V = a \cdot b \cdot c$ $V = \frac{1}{2} g \cdot h_g \cdot h$ $V = \frac{1}{3} A_G \cdot h$

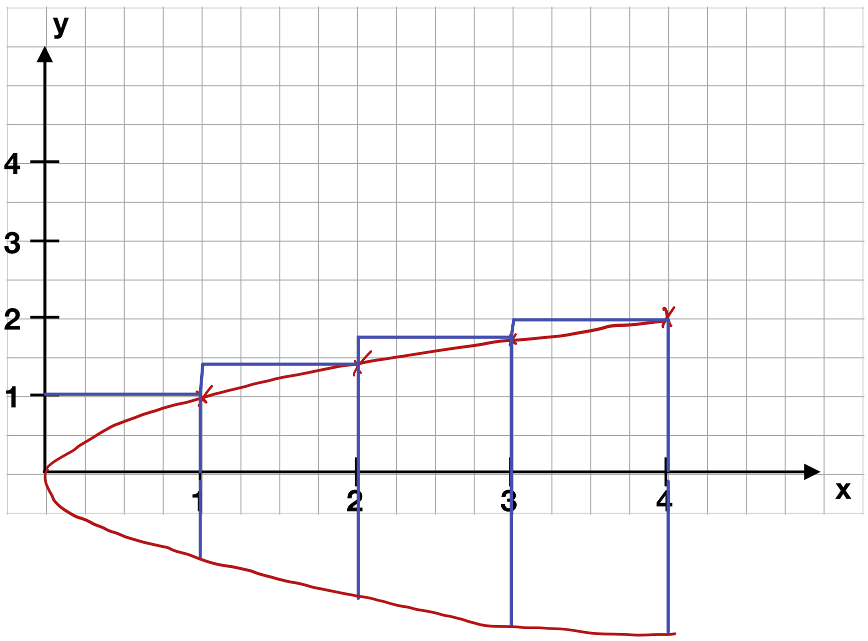


$V = \pi r^2 \cdot h$ $V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$ **?**

Idee: Zerlegen des Körpers in viele Zylinder mit geringer aber gleicher Höhe.

AUFGABE
(Analog zum Video. Zeichnen Sie auch den unteren Pokal analog zur 2. Folie der Aufgabe hinzu)

Der obere Rand eines liegenden Pokals lässt sich durch die Funktionsgleichung $f(x) = \sqrt{x}$ $(1LE \mathrel{\hat{=}} 1cm)$ im Intervall $0 \leq x \leq 4$ darstellen. Bestimmen Sie das Fassungsvermögen des Pokals.



Idee: Zerlege den Pokal in mehrere Scheiben (= Zylinder)

$V = \pi \cdot 1 \cdot [(f(1))^2 + (f(2))^2 + \ldots + (f(4))^2]$

Intervalllänge 1

Entspricht dem Radius des Zylinders

„unendlich kleine" Intervalle führen zu unendlich vielen Zylindern

$V_{Zylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V = \pi \cdot \int_0^4 (f(x))^2 \, dx$

FORMEL FÜR DIE BERECHNUNG DES VOLUMENS VON ROTATIONSKÖRPERN

Rotiert die Fläche unter dem Graphen der Funktion f über dem Intervall $[a; b]$ um die x-Achse, dann gilt für das Volumen V des entstehenden Rotationskörpers:

$$V = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 \, dx = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

BERECHNUNG DER AUFGABE

Der obere Rand eines liegenden Pokals lässt sich durch die Funktionsgleichung $f(x) = \sqrt{x}$ $(1LE \mathrel{\hat{=}} 1cm)$ im Intervall $0 \leq x \leq 4$ darstellen. Bestimmen Sie das Fassungsvermögen des Pokals.

$$V = \pi \int_0^4 (f(x))^2 \, dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^4 (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^4 x \, dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^4 = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 16 - 0 \right)$$

$$= 8 \cdot \pi \approx 25{,}13 \, cm^3$$

CAS: Grafik & Tabelle > Analyse > graf. Lsg > $\pi \int (f(x))^2 dx$

ÜBUNGSAUFGABEN

Bestimmen Sie das Volumen des Rotationskörpers der Funktion $f(x)$ im gegebenen Intervall I.

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $I = [0; 9]$
   $V = 127{,}23$
2. $f(x) = 2x - x^2$, $I = [0; 4]$
   $V = 107{,}23$
3. $f(x) = 3x^2 - 6x$, $I = [-2; 2]$
   $V \approx 965{,}10$
4. $f(x) = x^5 - 2x^2$, $I = [-2; 3]$
   $V \approx 41965{,}25$
5. $f(x) = x + 2$, $I = [-3; 1]$
   $V \approx 29{,}32$
6. $f(x) = 5x^2 + 3$, $I = [0; 9]$
   $V \approx 950696{,}2$