5.2. Integralregeln, Bestimmung des unbestimmten Integrals

(Die Beispiele weichen von den Zahlenbeispielen im Video ab!)

a) Grundintegrale

❶ POTENZFUNKTION

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$$

BEISPIELE:

- $\int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + c \qquad c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{x^8} dx = \int x^{-8} dx = -\frac{1}{7} x^{-7} + c \qquad c \in \mathbb{R}$
- $\int \sqrt[7]{x^4} dx = \int x^{\frac{4}{7}} dx = \frac{7}{11} x^{\frac{11}{7}} \qquad c \in \mathbb{R}$

❷ WINKELFUNKTIONEN

$$\int sin(x) dx = -\cos(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\int cos(x) dx = \sin(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

❸ POTENZFUNKTION für n= -1

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

b) Integralregeln

❹ FAKTORREGEL

$$\int k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int f(x) dx \qquad k \in \mathbb{R}$$

BEISPIELE:

- $\int 3x^6 dx = \frac{3}{7}x^7 + c \quad c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{2}{5}x^9 dx = \frac{2}{50}x^{10} + c = \frac{1}{25}x^{10} + c \quad c \in \mathbb{R}$

❺ SUMMENREGEL

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

BEISPIELE:

- $\int x^8 + x^2 dx = \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{3}x^3 + c \quad c \in \mathbb{R}$
- $\int x^2 + x^{-3} dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^{-2} + c \quad c \in \mathbb{R}$

❻ LINEARE SUBSTITUTION

… wird angewendet für verkettete Funktionen, deren innere Funktion eine lineare Funktion ist.

$$\int f(mx+n)\,dx = \frac{1}{m}F(mx+n) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

BEISPIELE:

- $\int (\frac{1}{2}x + 5)^6 dx = 2 \cdot \frac{1}{7} \cdot (\frac{1}{2}x+5)^7 = \frac{2}{7}(\frac{1}{2}x+5)^7 + c \quad c \in \mathbb{R}$
- $\int (2x+3)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3} + c \quad c \in \mathbb{R}$

c) Integrale mit vorheriger Umformung

$$\int \frac{(x^2 + 8x + 16)}{x+4} dx = \int \frac{(x+4)^2}{x+4} dx = \int x + 4 dx = \frac{1}{2}x^2 + 4x + c \quad c \in \mathbb{R}$$

➡️binomische Formel auflösen

$$\int \frac{2x^3 + 4x^2 + 4x + 10}{2x+4} dx = \int \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 5}{x+2} dx = \int x^2 + 2 + \frac{1}{x+2} dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x + ln(x+2) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

➡️Kürzen von Vielfachen und Polynomdivision

$$(x^3 + 2x^2 + 2x + 5) : (x + 2) = x^2 + 2 + \frac{1}{x+2}$$
$$\begin{array}{l} -(x^3 + 2x^2) \\ \hline \quad 0 \quad + 2x + 5 \\ \quad\quad -(2x+4) \\ \hline \quad\quad\quad 1 \end{array}$$

=> AH: S. 71