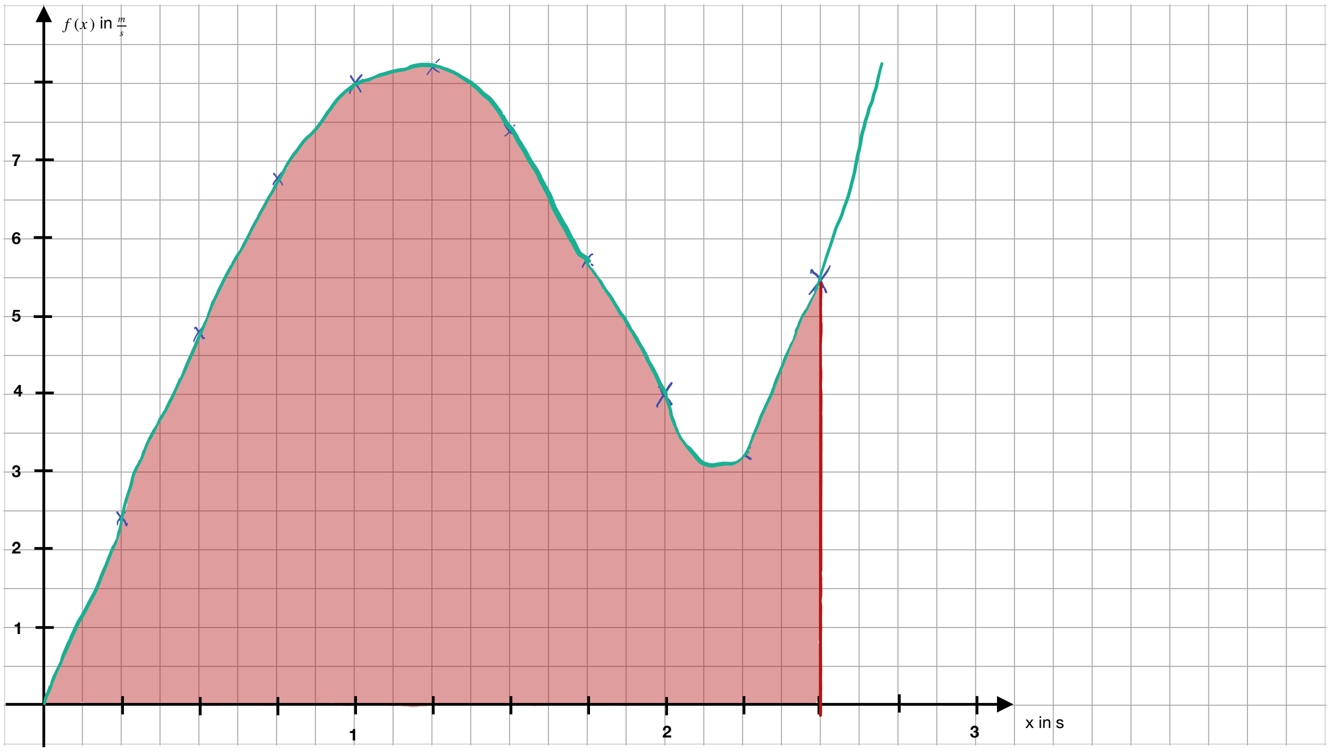
5.3. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

(Die Beispiele weichen von den Zahlenbeispielen im Video ab!)

EINSTIEG:
Die Startgeschwindigkeit eines Radfahrers kann in den ersten 3 Sekunden durch die Funktion $f(x) = x^5 - 3x^4 + 10x$ beschrieben werden.

Skizze: Fertigen Sie eine Skizze der Funktion an. Markieren Sie die Stelle von x = 2,5 analog zum Video.



Aufgabenstellung: Bestimmen Sie die Strecke, welche nach 2,5 Sekunden zurückgelegt wurde.

HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

Ist F eine Stammfunktion einer Funktion f im Intervall $[a; b]$, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Berechnung am Beispiel des Radfahrers: $f(x) = x^5 - 3x^4 + 10x$ $[0; 2{,}5]$
(analog zum Beispiel im Video)

$$\int_0^{2,5} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{3}{5}x^5 + 5x^2\right]_0^{2,5}$$

$$= \left(\frac{1}{6}\cdot 2{,}5^6 - \frac{3}{5}\cdot 2{,}5^5 + 5\cdot 2{,}5^2\right) - \left(\frac{1}{6}\cdot 0^6 - \frac{3}{5}\cdot 0^5 + 5\cdot 0^2\right)$$

$$\approx (40{,}69 - 58{,}59 + 31{,}25) - (0 - 0 + 0)$$

$$= 13{,}35 \text{ FE} \,\hat{=}\, \underline{13{,}35 \text{ m}}$$

NUTZEN:

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung oder auch der Fundamentalsatz der Analysis führt die Berechnung bestimmter Integrale auf die Berechnung unbestimmter Integrale (Stammfunktionen) zurück.

Er gilt unter der Voraussetzung, dass F(x) eine Stammfunktion der stetigen Funktion f(x) ist.

RECHENREGELN

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$
- $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

Beispielaufgabe: Berechnen Sie den Flächeninhalt den der Graph von $f(x) = 2x^2$ mit der x-Achse im Intervall a) $-1 \leq x \leq 1$ und b) $0 \leq x \leq 2$ einschließt.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_{0}^{2} = \frac{16}{3} - 0 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

AUFGABEN

Bestimmen Sie das bestimmte Integral mit der Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung.
(Hinweis: Der Flächeninhalt unterhalb der x-Achse nimmt einen negativen Wert an)
Die Lösungen werden am Ende des Videos eingeblendet.

a) $\int_{-2}^{3} x^2\,dx = \frac{35}{3} \approx 11{,}\overline{6}$

b) $\int_{-1}^{2} (x^4 - 7x^3)\,dx = -\frac{393}{20} =$

c) $\int_{-2}^{2} (x^5 + 7x^3)\,dx = 0$

d) $\int_{0}^{8} (e^x + 2x)\,dx = e^8 + 63 \approx 3043{,}96$

e) $\int_{-1}^{5} (\frac{1}{5}x^3 - \frac{2}{5}x + 2)\,dx = \frac{192}{5} = 38{,}4$

f) $\int_{-\pi}^{\pi} sin(x) + 1\,dx = 6{,}28$

=> LK am Freitag?