5.4. Berechnung von Flächeninhalten mit Hilfe des Integrals

(Die Beispiele weichen von den Zahlenbeispielen im Video ab!)

UNTERSCHEIDUNG:

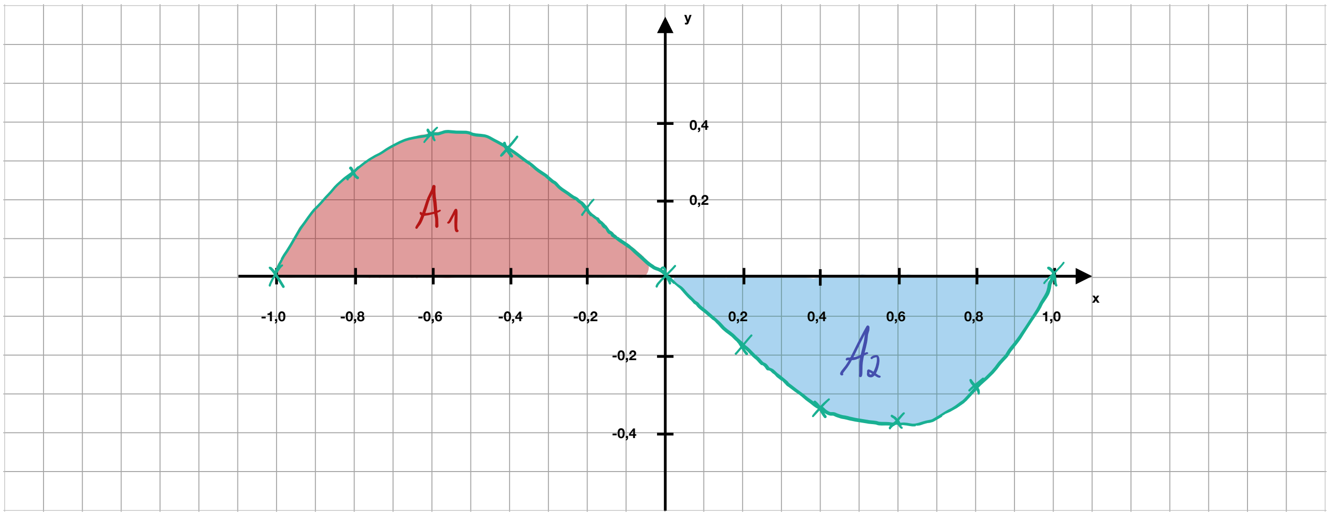
A) Flächen zwischen dem Graphen und der x-Achse

B) Flächen zwischen zwei Funktionen

A) FLÄCHEN ZWISCHEN DEM GRAPHEN UND DER X-ACHSE

Beispielfunktion: $f(x) = x^3 - x$

(Zeichne die Funktion im Intervall $-1 \leq x \leq 1$)



Berechne:

$$\int_{-1}^{1} x^3 - x \; dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Anmerkung:

Befinden sich Flächen ober- und unterhalb der x-Achse, werden diese miteinander „verrechnet".

👉 Bei Flächen unter der x-Achse werden die Beträge berechnet.

VORGEHEN ZUR BESTIMMUNG DES FLÄCHENINHALTS

1. Bestimme die Nullstellen von f(x):

2. Berechne die Flächeninhalte zwischen den aufeinanderfolgenden Nullstellen.
   Bilde bei negativen Flächen den Betrag:
   $$A_1 = \int_{x_{N_1}}^{x_{N_2}} f(x)\,dx \; ; \; A_2 = \left|\int_{x_{N_2}}^{x_{N_3}} f(x)\,dx\right| ; \ldots$$

3. Berechne den gesamten Flächeninhalt, indem du die Teilflächen addierst.

BEISPIEL

(Berechne die Flächen, welche die Beispielfunktion mit der x-Achse einschließt analog zu dem Beispiel im Video.)

$f(x) = x^3 - x$

(1) $f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0$ für $x_{N_1} = -1$ $x_{N_2} = 0$ $x_{N_3} =$

(2) $A_1 = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = 0 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ FE

$A_2 = \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - 0 = -\frac{1}{4}$ FE

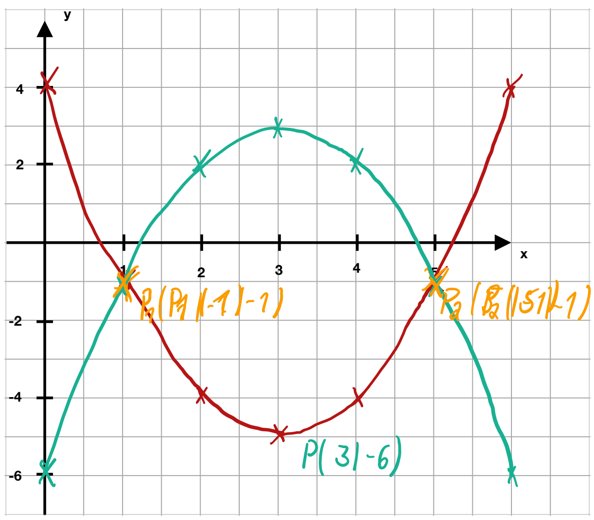
$\Rightarrow A_2 = \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$ FE

(3) $A_{ges} = A_1 + |A_2| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ FE

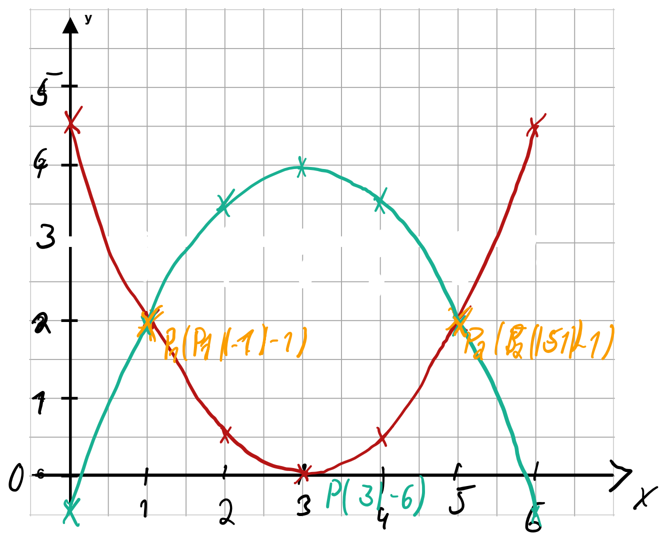
B) FLÄCHEN ZWISCHEN ZWEI FUNKTIONEN

Beispielfunktionen: $f(x) = -x^2 + 6x - 6$ und $g(x) = x^2 - 6x + 4$

(Zeichne die Funktionen im Intervall $0 \leq x \leq 5$)



(Zeichne die nach oben verschobenen Funktionen im Intervall $0 \leq x \leq 5$, analog zum Video)



VORGEHEN ZUR BESTIMMUNG DES FLÄCHENINHALTS

1. Bestimme die Schnittpunkte der beiden Funktionen:
2. Sollte ein Teil der gemeinsamen Fläche unter der x-Achse liegen: Berechne den kleinsten Funktionswert der „unteren" Funktion zwischen den beiden Schnittstellen.
3. Verschiebe beide Funktionen über die x-Achse, indem du beide Funktionen mit dem Betrag des minimalen Wertes aus 2. addierst.
4. Subtrahiere die „untere Funktion" von der „oberen Funktion" und berechne davon das entsprechende Integral in den Grenzen der Schnittstellen:

$$\int_{x_{s1}}^{x_{s2}} f(x) - g(x)\,dx \quad \text{oder} \quad \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} g(x) - f(x)\,dx \qquad \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} |f(x) - g(x)|\,dx$$

1) $f(x) = g(x)$

$-x^2 + 6x - 6 = x^2 - 6x + 4$ für $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$

2) „untere Funktion" ist $g(x)$: $g'(x) = 2x - 6 = 0$ für $x = 3$

$g''(x) = 2 \Rightarrow$ Minimum

$g(3) = -5 \Rightarrow$ Addiere mit 5

3) $f_5(x) = -x^2 + 6x - 1$ $\qquad g_5(x) = x^2 - 6x + 9$

4) $f_5(x) - g_5(x) = -x^2 + 6x - 1 - (x^2 - 6x + 9) = -2x^2 + 12x - 10$

$$A = \int_1^5 -2x^2 + 12x - 10\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 6x^2 - 10x\right]_1^5 = \frac{50}{3} - \left(-\frac{14}{3}\right) = \frac{64}{3} \approx 21{,}\overline{3}\ \text{FE}$$