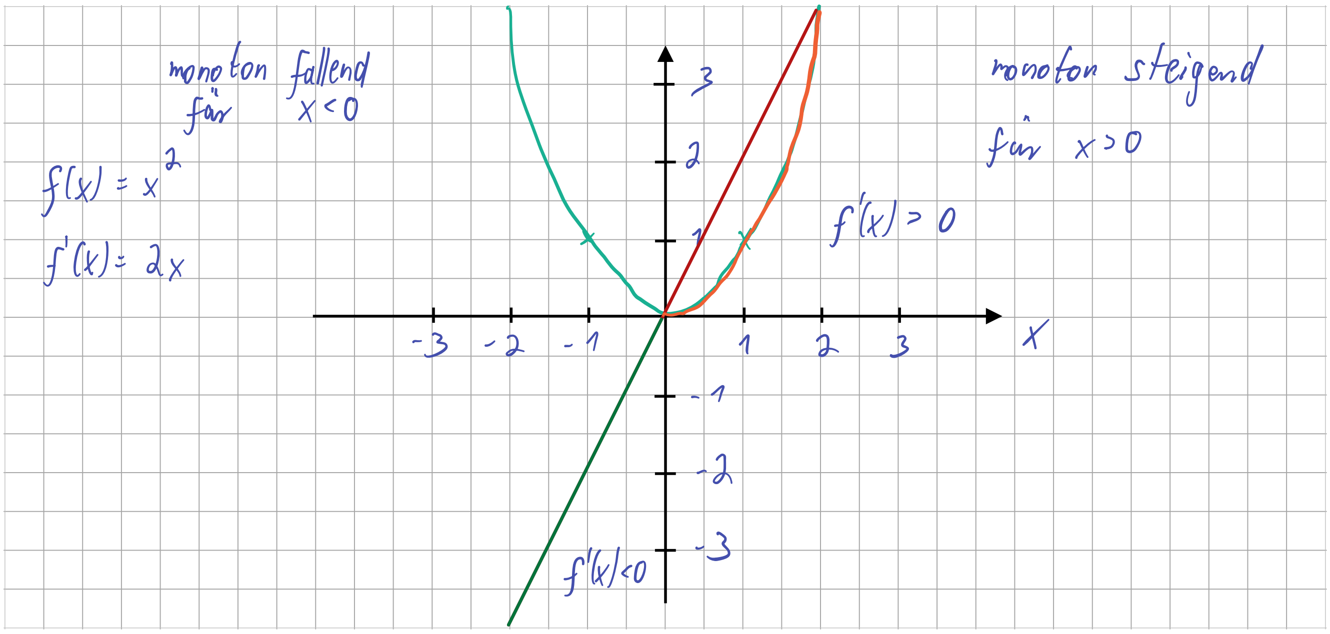
1.7. Ableitungen und Monotonie

(Die Beispiele weichen von den Zahlenbeispielen im Video ab!)

EINSTIEG

Betrachten Sie den Zusammenhang zwischen der Monotonie der Funktion $f(x) = x^2$ und deren Ableitung.
(Skizzieren Sie die Zeichnung aus dem Video. Wählen Sie hierbei die gleiche farbliche Unterscheidung.)



DEFINITION: ABLEITUNG UND MONOTONIE

- Eine Funktion ist in einem Intervall I monoton steigend, wenn für alle $x_0 \in I$ $m = f'(x_0) \geq 0$.
  - streng monoton steigend für $m = f'(x_0) > 0$
- Eine Funktion ist in einem Intervall I monoton fallend, wenn für alle $x_0 \in I$ $m = f'(x_0) \leq 0$.
  - streng monoton fallend für $m = f'(x) < 0$

BEISPIEL: BESTIMMEN DER MONOTONIE EINER FUNKTION

Bestimmen Sie Analog zum Video rechnerisch die Monotonie der Funktion $f(x) = 2x^3 + x^2$

1. Schritt: Ableitung bilden
2. Schritt: Ableitungsfunktion gleich 0 setzen, Nullstellen berechnen
3. Schritt: Intervallgrenzen für Monotonie festlegen
4. Schritt: Stellen zwischen den Intervallgrenzen in die Ableitung einsetzen (<, > überprüfen)
5. Schritt: strukturiertes Notieren

$f(x) = 2x^3 + x^2$ $\qquad f'(x) = 6x^2 + 2x = x(6x+2) = 0$

für $x_{N_1} = 0 \qquad x_{N_2} = -\frac{1}{3}$

- für $x < -\frac{1}{3}$: $\quad f'(-1) = 6 \cdot -2 = 4 > 0 \Rightarrow$ m. steigend
- für $-\frac{1}{3} < x < 0$ $\quad f'\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{6} \cdot 6 + 2\right) = -\frac{1}{6} \cdot 1 = -\frac{1}{6} < 0 \Rightarrow$ m. fallend
- für $x > 0$ $\quad f'(1) = 6 + 2 = 8 > 0 \Rightarrow$ m. steigend

---

$f(x)$ ist monoton steigend für: $x \leq -\frac{1}{3}$; $x \geq 0$

$f(x)$ ist monoton fallend für: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 0$

AUFGABEN
Bestimmen Sie die Monotonie von folgenden Funktionen. (Die Lösungen sind im Video enthalten!)

1. $f(x) = -x^3 + x^2$
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 16x$
3. $f(x) = 25x^2 - x^4$
4. $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$
5. $f(x) = x^3 + 7x$
6. $f(x) = x^2 + 5x$
7. $f(x) = 8x^3 - 3x^2$
8. $f(x) = sin(x)$ für $-2\pi < x < 2\pi$