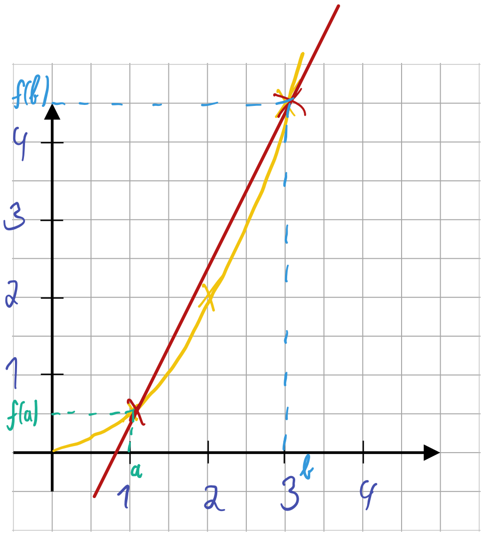
1.3. Die mittlere und lokale Änderungsrate

(Die Beispiele weichen von den Zahlenbeispielen im Video ab!)

AUFGABE 1

Bestimmen Sie die durchschnittliche Änderung der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ im Intervall $1 \leq x \leq 3$.

(Zeichnen Sie die Funktion, die Sekante und die entsprechenden Hilfslinien wie im Video ein.)



Sekante mit

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= \frac{4{,}5 - 0{,}5}{3 - 1} = 2$$

DEFINITION: „MITTLERE ÄNDERUNGSRATE“

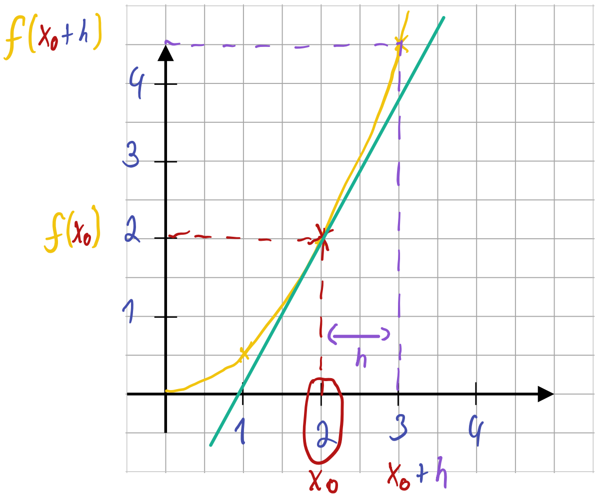
Gegeben ist eine Funktion f. Der Quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ heißt Differenzenquotient oder mittlere Änderungsrate von f über dem Intervall $[a;b]$.

Geometrisch gedeutet ist der Differenzenquotient der Anstieg m einer Sekante durch zwei Punkte $P(a \mid f(a))$ und $Q(b \mid f(b))$ auf dem Graphen der Funktion f.

AUFGABE 2

Bestimmen Sie die momentate Änderung der Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ an der Stelle $x = 2$.

(Zeichnen Sie die Funktion, die Tangente und die entsprechenden Hilfslinien wie im Video ein.)



Idee: $h \to 0$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$\rightarrow$ Tangente

Tipp: Zeichne x_0 bei $x = \cancel{1}$ 2 ein und $x_0 + h$ bei $x = 3$

DEFINITION: „LOKALE ÄNDERUNGSRATE“

Der Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ des Differenzenquotienten $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ heißt:

1) lokale Änderungsrate oder

2) 1. Ableitung von f an der Stelle x_0.

Außerdem nennt man diese Zahl auch Differentialquotient und schreibt dafür:

BEISPIEL:

Berechnen Sie die lokale Änderungsrate von $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ an der Stelle $x = 2$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{\frac{1}{2}(2+h)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot (4 + 4h + h^2) - \frac{1}{2} \cdot 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2} + 2h + \frac{h^2}{2} - \cancel{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2 + \frac{h}{2})}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2 + \frac{1}{2}h = 2$$