1.1.1. Grenzwerte von Funktionen für $x \to \infty$

(Die Beispiele weichen von den Zahlenbeispielen im Video ab! Versuche zur Veranschaulichung die selben Farben wie im Video zu wählen)

AUFBAU DES LIMES-BEFEHLS

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

Limes (Grenzwert)

betrachtete Funktion

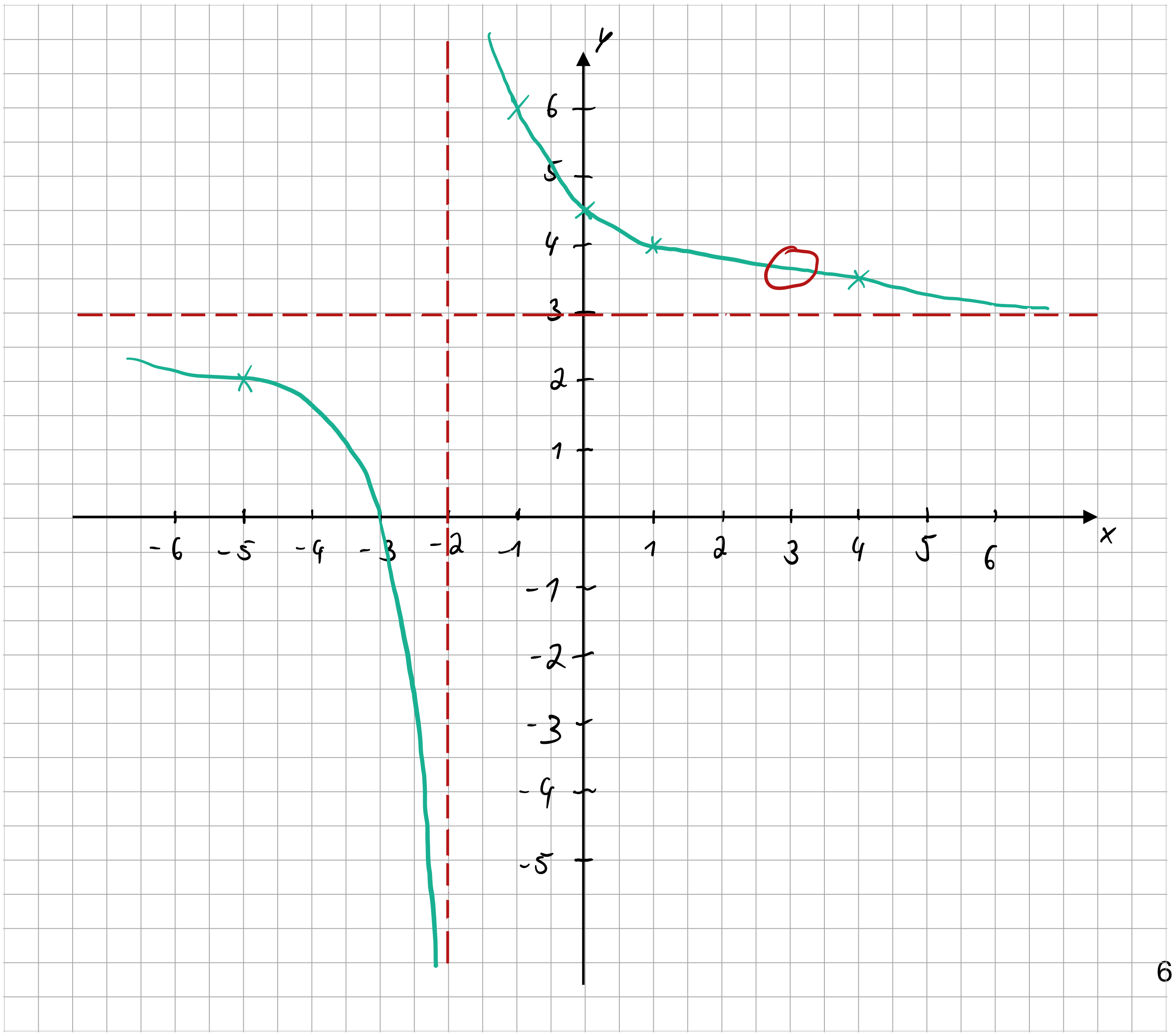
zu betrachtende Stelle
oder Richtung $(+\infty, -\infty)$

BEISPIELFUNKTION

$$f(x) = \frac{3x^2 - 27}{(x-3)\cdot(x+2)}$$

$x \neq 3$; $x \neq -2$

x	-10	-5	-2,1	-1,9	-1	0	1	2,9	3,1	4	5	10	100
$f(x)$	2,625	2	-27	33	6	4,5	4	3,61	3,59	3,5	3,43	3,25	3,03



UNTERSCHEIDUNG

1) Verhalten von Funktionen im Unendlichen

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

2) Verhalten von Funktionen an einer Stelle x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

DEFINITION „GRENZWERT“
Eine Zahl g heißt Grenzwert der Funktion f für $x \to \pm\infty$, wenn für jede Argumentenfolge aus dem dazugehörigen Definitionsbereich die dazugehörige Bildfolge den selben Grenzwert g hat.

BERECHNUNG VON GRENZWERTEN *(FÜR GANZRATIONALE FUNKTIONEN)*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{7}x^4 + 2x^2 - 3 \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{4}x^5 + x^2 + 2$$

Faktorisieren der höchsten Potenz

$$= \lim_{x \to \pm\infty} x^4 \left(\frac{1}{7} + \underbrace{\frac{2}{x^{2}}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{3}{x^4}}_{\to 0} \right) \qquad = \lim_{x \to \pm\infty} x^5 \left(\frac{3}{4} + \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2}{x^5}}_{\to 0} \right)$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{7} x^4 \qquad = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{3}{4} x^5$$

$\to -\infty$: ∞ $\to \infty$: ∞

$\to -\infty$: $-\infty$ $\to \infty$: ∞

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{7}x^4 + 2x^2 - 3 = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{3}{4}x^5 + x^2 + 2 = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{7}x^4 + 2x^2 - 3 = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{4}x^5 + x^2 + 2 = -\infty$$

BERECHNUNG VON GRENZWERTEN *(FÜR GEBROCHENRATIONALE FUNKTIONEN)*

- $\lim\limits_{x\to\ \infty} \dfrac{3x^2-2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\cancel{x^2}\left(3-\overset{\to 0}{\frac{2}{x}}\right)}{\cancel{x^2}}\right) = 3$
- $\lim\limits_{x\to\ \infty} \dfrac{x+7}{x^4-10x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\cancel{x^4}\left(\overset{\to 0}{\frac{1}{x^3}}+\overset{\to 0}{\frac{7}{x^4}}\right)}{\cancel{x^4}\left(1-\underset{\to 0}{\frac{10}{x^3}}\right)}\right) = \dfrac{0}{1} = 0$
- $\lim\limits_{x\to\ \infty} \dfrac{x^5}{2x+1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\cancel{x}\,(x^4)}{\cancel{x}\left(2+\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}\right)}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{2} = \infty$

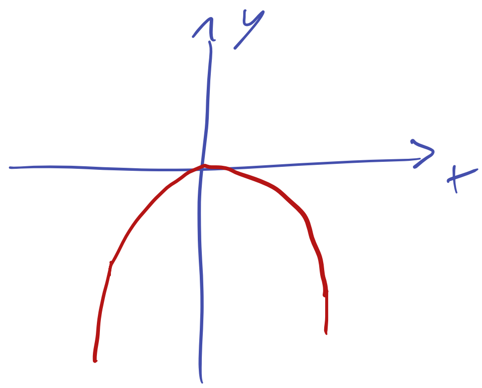
FAUSTREGEL - VERHALTEN VON FUNKTIONEN IM UNENDLICHEN

Z - Zählergrad N - Nennergrad

Z □ N		
$Z = N$	Koeffizient vor der höchsten Potenz	$f(x) = \dfrac{2x^2+3x-1}{x^2+3}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$
$Z < N$	0	$f(x) = \dfrac{4x^2+3x-2}{x^3+3}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
Z > N	uneigentliche Grenzwerte $(\pm\infty)$	$f(x) = \dfrac{7x^3+2x}{4x^2}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$f(x) = -x^2$



20.09.22 (Dienstag)

1.1.1. Grenzwerte von Funktionen für $x \to x_0$

(Die Beispiele weichen von den Zahlenbeispielen im Video ab! Versuche zur Veranschaulichung die selben Farben wie im Video zu wählen)

3) GRENZWERTE VON FUNKTIONEN AN EINER STELLE x_0

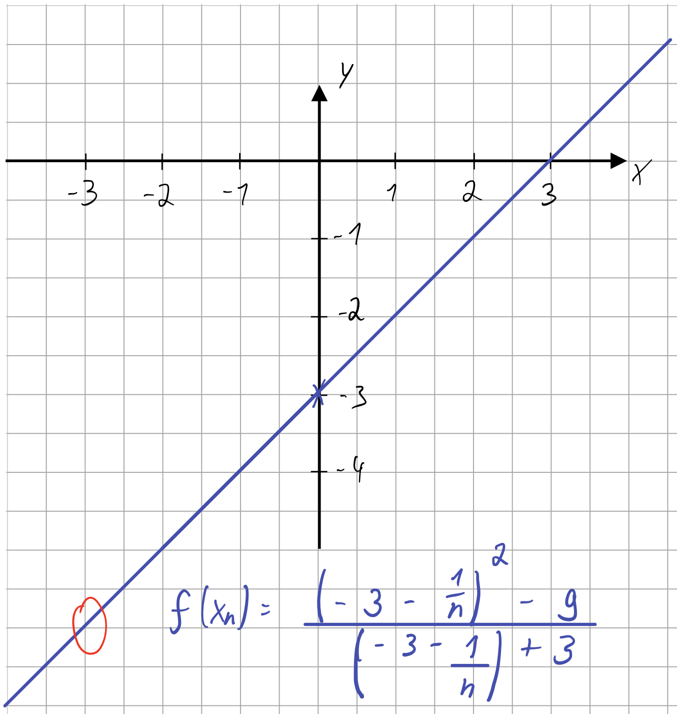
- $\lim\limits_{x\to -1} x^2 - x = 2$
- $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x-3)\cdot(x+3)}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} x-3 = -6$

Überprüfe ob die Grenzwerte von links und von rechts existieren.

$x_n = (-3 - \frac{1}{n})$

$x_n = (-3 + \frac{1}{n})$

Anmerkung: Berechne den Grenzwert von links und rechts für die Funktion $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ analog zum Beispiel im Video. Zeichne die Funktion auch in das untenstehende Koordinatensystem.



$$f(x_n) = \frac{\left(-3-\frac{1}{n}\right)^2 - 9}{\left(-3-\frac{1}{n}\right)+3} = \frac{\cancel{9} + \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2} \cancel{-9}}{\cancel{-3} - \frac{1}{n} \cancel{+3}} = -n\left(\frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = -6 - \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} -6 - \frac{1}{n} = -6$$

$$f(x_n) = \frac{\left(-3+\frac{1}{n}\right)^2 - 9}{\left(-3+\frac{1}{n}\right)+3} = \frac{\cancel{9} - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2} \cancel{-9}}{\cancel{-3} + \frac{1}{n} \cancel{+3}} = n\left(-\frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = -6 + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} -6 + \frac{1}{n} = -6$$

VERHALTEN AN DEFINITIONSLÜCKEN

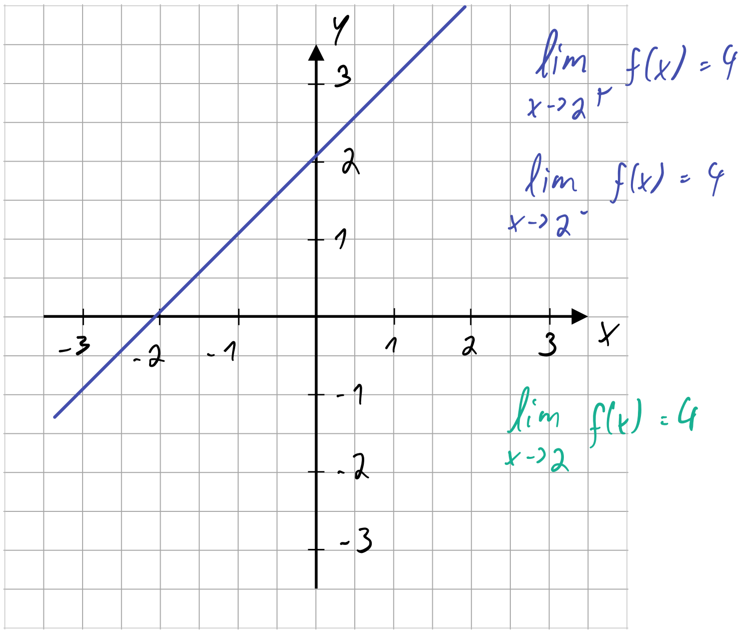
Wir betrachten eine Funktion f, die sich als Quotient zweier ganzrationaler Funktionen u(x) und v(x) darstellen lässt:

Ist x_0 eine Nullstelle der Funktion v(x), so ist f an der Stelle x_0 nicht definiert.
Man bezeichnet x_0 dann als Definitionslücke von f.

Es gibt 4 Arten von Definitionslücken:

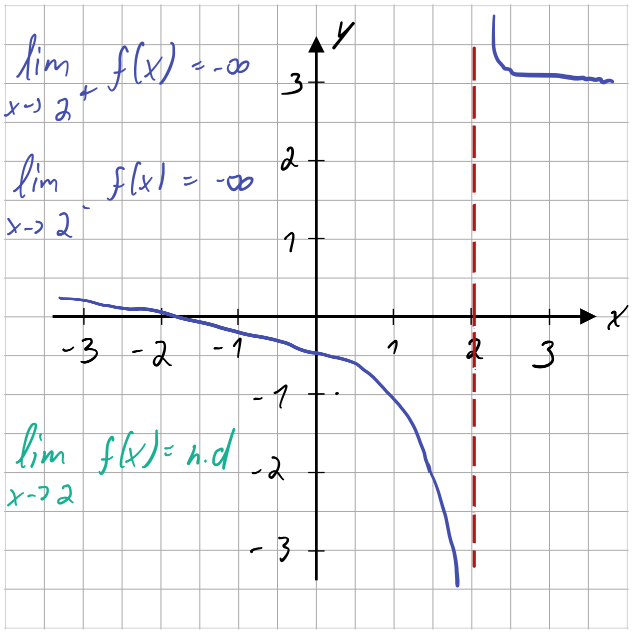
1) hebbare Definitionslücke

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$



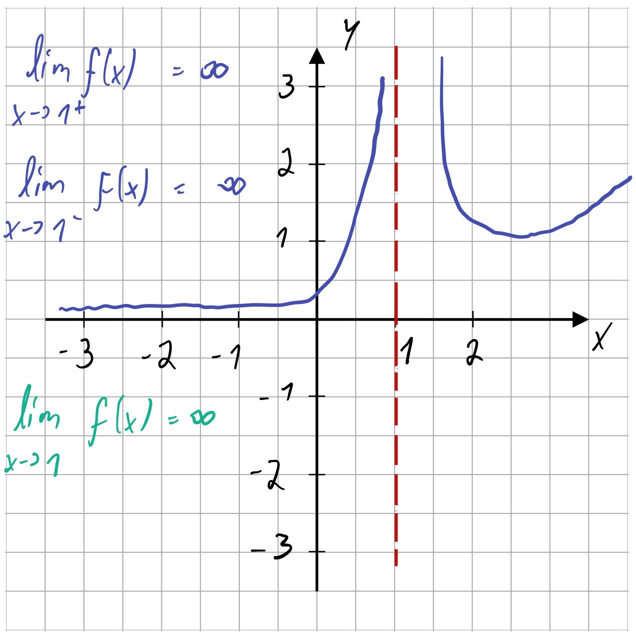
2) Polstelle mit VZW

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{(x - 2)^2}$



3) Polstelle ohne VZW

Beispiel: $f(x) = \dfrac{e^x}{5 \cdot (x - 1)^2}$



4) Sprung

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$