1.4. Differenzierbarkeit und einfache Ableitungsregeln

(Die Beispiele weichen von den Zahlenbeispielen im Video ab!)

EINSTIEGSAUFGABEN

Berechnen Sie: a) die 1. Ableitung von $f(x) = 3x^2 + 1$ an der Stelle $x_0 = 3$

b) die 1. Ableitung von $f(x) = x^2$ für ein allgemeines x_0

a) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{3(3+h)^2+1-28}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{3[9+6h+h^2]-27}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cancel{27}+18\cancel{h}+h^{\cancel{2}}-\cancel{27}}{\cancel{h}}$

$= \lim\limits_{h\to 0} 18+h = \underline{\underline{18}}$

b) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cancel{x_0^2}+2\cancel{h}x_0+h^{\cancel{2}}-\cancel{x_0^2}}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h\to 0} 2x_0+h = \underline{\underline{2x_0}}$

$\Rightarrow f'(x) = 2x$

DEFINITION: „DIFFERENZIERBARKEIT“

- Sei f eine Funktion und x_0, x_0+h seien im Definitionsbereich von f. Wenn der Differentialquotient: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$ an der Stelle x_0 existiert, so heißt f an der Stelle x_0 differenzierbar. Außerdem ist dieser Grenzwert der Anstieg von f in x_0.
- Ist $f(x)$ für alle $x \in D_f$ differenzierter, so heißt $f'(x)$ Ableitungsfunktion oder 1. Ableitung von $f(x)$.

Ableitungsregeln

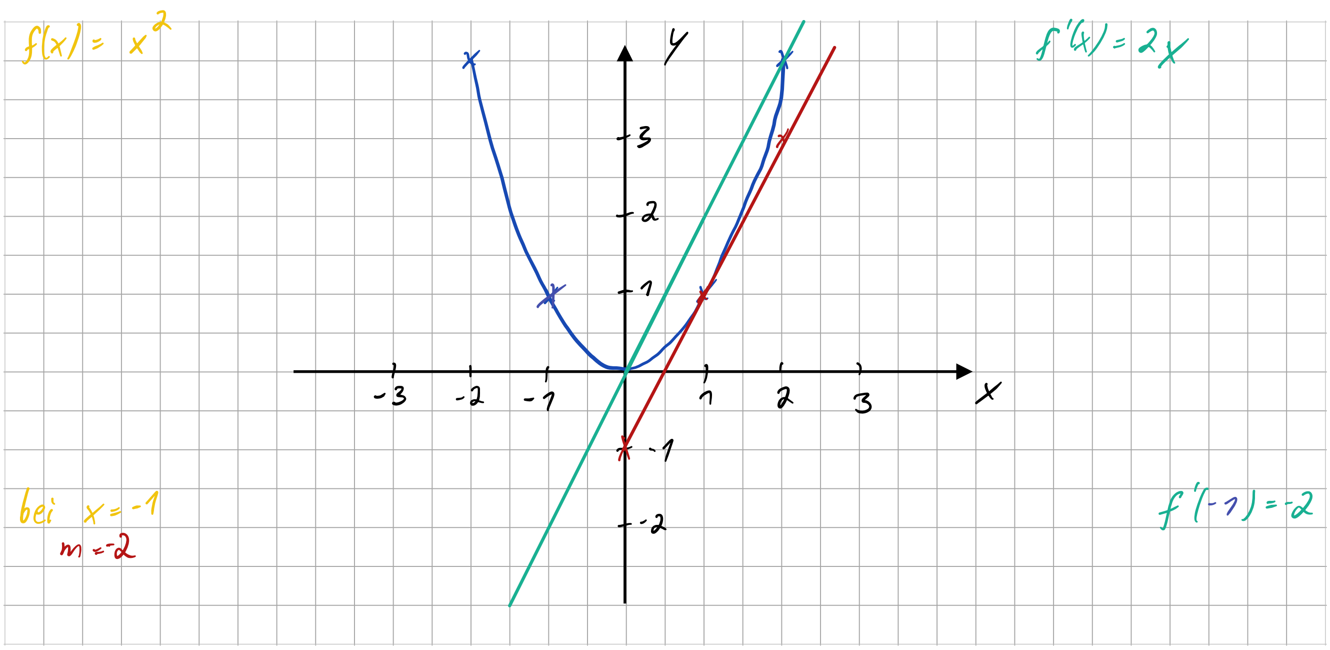
2) POTENZREGEL

$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}$

Beispiele:

- $f(x) = x^6$ $\quad f'(x) = 6x^5$ $\qquad f(x) = x^{13}$ $\quad f'(x) = 13x^{12}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x^4} = x^{-4}$ $\qquad f'(x) = -4x^{-5}$
- $f(x) = \sqrt{(x)} = x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

Skizze *(Bestimme den Anstieg an der Stelle $x_0 = 1$)*



3) FAKTORREGEL

$$\boxed{f(x) = c \cdot u(x) \implies f'(x) = c \cdot u'(x)}$$

Beispiele:

- $f(x) = 7x^3$ $\quad f'(x) = 21x^2$ $\qquad f(x) = -2x^8$ $\quad f'(x) = -16x^7$
- $f(x) = \dfrac{3}{x^2} = 3x^{-2}$ $\qquad f'(x) = -6x^{-3}$
- $f(x) = \dfrac{1}{3}\sqrt{(x)} = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{2}}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}}$

AUFGABEN

Berechnen Sie die folgenden Ableitungen. (Die Lösungen sind im Video enthalten!)

1. $f(x) = x^3$ $\quad f'(x) = 3x^2$
2. $f(x) = x^{-4}$ $\quad f'(x) = -4x^{-5}$
3. $f(x) = 5x^{-4}$ $\quad f'(x) = -20x^{-5}$
4. $f(x) = \dfrac{7}{x}$ $\quad f'(x) = -14x^{-2}$
5. $f(x) = 3\sqrt{x}$ $\quad f'(x) = \dfrac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
6. $f(x) = -5\sqrt[3]{x}$ $\quad f'(x) = -\dfrac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ $\quad f'(x) = -\dfrac{1}{8}x^{-\frac{5}{4}}$
8. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $\quad f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$